Corentin Bergeron ENS Rennes

Endomorphismes semi-simples

Développement ni original, ni trop classique, qui aborde la question des endomorphismes semi-simples et donne une condition nécéssaire et suffisante sur son polynôme minimal. C'est un développment assez agréable à faire, qui mélange quelques notions fondamentales d'algèbre linéaire avec un (tout petit) peu de théorie des corps.

Pour le recasage, les leçons d'algèbre linéaire comme la 150, 151 ou 152 sont parfaitement adaptées (pour la 152, il faut se dire que la semi-simplicité est une sorte de généralisation de la diagonalisabilité, et permet de généraliser Dunford). L'utilisation du corps de rupture, et de l'irréductibilité pour l'étape 2 et 3, permet un recasage correct en 141. Selon moi, les leçons 122, 125 et 148 ne sont vraiment pas adaptées à ce développement, on y aborde trop peu de points qui rentre dans chacune de ces leçons (même si on utilise un peu de corps de rupture).

I - Prémices

Définition 1

Soit E un K-e.v., et u un endomorphisme. On dit que u est semi-simple si tout s.e.v. stable par u possède un supplémentaire stable par u.

Exemple 2

Un endomorphisme diagonalisable est semi-simple.

Preuve :

En effet, soit u un endomorphisme diagonalisable et F un s.e.v. stable par u. L'endomorphisme induit sur F est aussi diagonalisable. Soit alors $(f_1, \dots, f_m)$ une base de vecteurs propres de F et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de E. On peut compléter la base de F avec des vecteurs de la base de E, en un base $(f_1, \dots, f_n)$. Posons :

$$G = \text{Vect}[f_{m+1}, \dots, f_n].$$

Alors F et G sont stables par u, et sont supplémentaires.

II - Le développement

Théorème 3

Un endormorphisme u est semi-simple si et seulement si son polynôme minimalπ_u ne possède pas de facteurs carrés.

Preuve :

Étape 1 : Sans direct

Supposons u semi-simple. Supposons que $\pi_u = P^2Q$, avec P, Q non constants.

On considère $F = \ker(P(u)) \subset E$, s.e.v. stable par u, qui admet donc un supplémentaire $G \subset E$ stable par u.

$$\forall x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G} \quad : \quad (PQ)(u)(x) = 0 + \underbrace{PQ(u)(x_G)}_{\in F} \in F$$

car $P^2Q(u) = 0$, mais par stabilité,

$$PQ(u)(x_G) \in G$$

, d'où $PQ(u)(x_G) = 0$ et $PQ(u)(x) = 0$, $ce qui contredit la minimalité de \pi_u$).

Étape 2 : Étude de la stabilité par une extension

Lemme 4

Soit $L = K[X]/\langle \pi_u \rangle$ (π_u irréductible). On munit E de la structure de L-e.v. donnée par $\overline{P} \cdot x = P(u)(x), \quad \forall \overline{P} \in L, x \in E$.
Alors F est un K-e.v. stable par u si et seulement si F est un L-e.v. de E. En particulier, u est semi-simple.

Preuve :

Si F est un K-ev de E stable par u, $\forall x, y \in F, \overline{P} \in L$:

$$\bar{P} \cdot x + y = \underbrace{P(u)(x)}_{\in F} + \underbrace{y}_{\in F} \in F.$$

Réciproquement, si F est un L-e.v. de E, alors $\forall x \in F$, $\bar{X} \cdot x \in F$ i.e. $u(x) \in F$.

Si F est stable par u, c'est donc un L-ev de E et admet un supplémentaire G, qui est un L-ev donc stable par u en tant que K-ev. L'endomorphisme u est donc semi-simple.

Étape 3 : Sens réciproque

Supposons π_u sans facteurs carrés, et écrivons : $\pi_u = \prod_{k=1}^{p} P_k$, les P_k irréductibles 2 à 2 distincts.

Par le lemme des noyaux :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} \underbrace{\ker(P_k(u))}_{F_k}.$$

Chacun des F_k est stable par u et le polynôme minimal de $u_k := u_{|F_k}$ est P_k (car irréductible et annulateur). Par le lemme, u_k est semi-simple.

Soit F un sev de E stable par u, on a

$$F = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k \cap F.$$

En effet, $u_F := u_{|F}$ étant annulé par π_u, on a

$$F = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker\left(P_k(u_F)\right) = \bigoplus_{k=1}^{p} \ker\left(P_k(u)\right) \cap F.$$

Soit pour $k \in [\![1, p]\!]$, G_k un supplémentaire de $F_k \cap F$ dans F_k, stable par u car u_k semi-simple.

Alors $G = \bigoplus_{k=1}^{p} G_k$ (on a bien une somme directe car $G_k \subset F_k) est stable par u, et E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k = \bigoplus_{k=1}^{p} (F_k \cap F) \oplus G_k = F \oplus G$.

Théorème 5

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si M est semi-simple sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

On a l'équivalence M semi-simple si et seulement si π_M n'a pas de facteurs carrés dans $\mathbb{R}[X]$. Or π_M n'a pas de facteurs carrés dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement s'il n'a pas de facteurs carrés dans $\mathbb{C}[X]$, i.e. est scindé à racines simples.

III - Décomposition de Dunford

Un intérêt de la semi-simplicité, en plus d'étendre la notion de diagonalisabilité, est l'extension de la décomposition de Dunford.

Théorème 6

Pour $K = \mathbb{R}$, et $u \in E$, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tel que d soit semi-simple, n soit nilpotents, d et n commutent et $u = d + n$.

Preuve :

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice associée à u dans une base fixée. On applique la décomposition de Dunford dans $\mathbb{C}$ à cette matrice :

$$M = D + N, \quad D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}), \quad N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C}).$$

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en conjuguant et par unicité de la décomposition de Dunford :

$$D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R}).$$

L'égalité se traduit alors par $u = d + n$ dans $\mathcal{L}(E)$ avec n nilpotent. Comme D est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, il est semi-simple sur $\mathbb{R}$, et donc d est semi-simple.

IV - Remarques

1 - Ce développment peut être un peu cours pour certains, n'hésitez pas à expliquez rapidement pourquoi on a bien une structure de L-e.v. dans l'étape 2, ou à faire la preuve de l'équivalence entre diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et semi-simple sur $\mathbb{R}$.

2 - Le théorème 2 peut être généralisé en prenant K un corps parfait et $\overline{K}$ sa clôture algébrique. Attention, c'est faux si le corps n'est pas parfait.

3 - Si vous voulez approfondir le thème des endomorphismes semi-simples, et la question des corps parfaits, je vous conseille l'excellent document du GOAT Théo Untrau que j'ai mis en référence.

4 - Il me semble important de mettre dans votre plan l'application à la décomposition de Dunford, car cela justifie un peu le fait d'en parler, et que ce ne soit pas abordé juste pour un recasage avantageux.

5 - Pour certains, le recasage en 152 peut paraître un peu abusif. Cela peut s'arranger en montrant le théorème 2 ou en démontrant qu'un endomorphisme diagonalisable est semi-simple.

V - Références

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation externe*, Jean-Étienne Rombaldi
[Pdf] : *https ://theo-untrau.pages.math.cnrs.fr/agreg.html*, Théo Untrau